

L'expérimentation numérique dans les sciences : une brève histoire

Jean-René Chazottes^{*}, Marc Monticelli[†]

4 novembre 2014

Résumé

Cet article retrace brièvement quelques étapes marquantes de l'histoire de l'expérimentation numérique en mathématique et en physique. Les exemples que nous abordons montrent une évolution rapide du statut des ordinateurs : de simples « moulins à calculs » au départ, ils sont devenus de véritables instruments de recherche permettant des découvertes impossibles par d'autres moyens. Le choix des exemples reflète nos goûts et nos connaissances. Nous nous sommes efforcés de citer le nom des ordinateurs et des programmeurs dans chaque exemple.

1 Introduction

L'émergence des ordinateurs, accélérée par la seconde Guerre mondiale, a donné une nouvelle dimension aux « mathématiques expérimentales », c'est-à-dire l'exploration des propriétés d'objets mathématiques par des calculs. Cette approche, qui a toujours existé avait vu son importance diminuer progressivement à partir du XVIIe siècle en raison de la place grandissante de l'abstraction. Au-delà de l'extension stupéfiante du domaine des calculs possibles, de leur vitesse et de leur précision, les ordinateurs ont fourni un outil puissant : la visualisation, qui permet une exploration et la découverte de phénomènes qui passeraient inaperçus autrement.

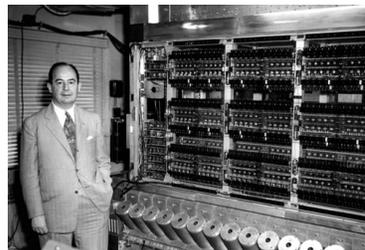
Les sciences physiques ont tiré un bénéfice des ordinateurs encore plus grand et plus profond que les mathématiques. En effet, les ordinateurs permettent de faire des expériences numériques à partir des équations gouvernant les phénomènes que l'on désire étudier, alors que les expériences classiques peuvent être trop compliquées, trop coûteuses, voire impossibles à réaliser (comme en astrophysique, par exemple). Des expériences – dans le monde « réel » – ont même été suscitées par des expériences numériques. Le terme anglo-saxon pour qualifier cette approche est « simulation », qui est également utilisé par les francophones,

^{*}Centre de Physique Théorique, UMR 7644 du CNRS, École polytechnique, Palaiseau

[†]Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné, UMR 7351 du CNRS, Université de Nice Sophia Antipolis

mais le mot « expérimentation » correspond beaucoup mieux à ce qu'est effectivement l'utilisation du numérique dans ces sciences.

L'objet de cet article est d'illustrer comment l'expérimentation numérique, devenue interactive au fil du temps, a permis des découvertes impossibles sans elle, ainsi que le renouvellement, voire la renaissance, de certains domaines des mathématiques et de la physique. Au-delà de la recherche scientifique, les ordinateurs ont influencé la didactique des mathématiques et de la physique. Citons comme exemple les livres de HUBBARD et WEST [14] qui sont une introduction aux systèmes dynamiques.



J. VON NEUMANN et l'ENIAC (1952)

Les grands inspirateurs de l'utilisation de l'expérimentation numérique sont STANISLAS ULAM, JOHN VON NEUMANN et ALAN TURING. Partant de ces figures incontournables, nous évoquerons plusieurs exemples, plus ou moins célèbres, qui illustrent cette démarche.

NOTE. Cet article est une adaptation d'un article originellement conçu pour tablette tactile, avec des expériences numériques interactives. Il en existe également une version conçue pour l'Internet qui contient des expériences numériques interactives.¹ Nous remercions des relecteurs anonymes de la *Gazette* qui ont contribué à l'amélioration de ce texte.

2 John von Neumann & Stanislas Ulam : les précurseurs

JOHN VON NEUMANN et STANISLAS ULAM sont les premiers à avoir compris le potentiel des ordinateurs en mathématique et en physique. Voici ce qu'écrivit ULAM :

« Presque immédiatement après la guerre, JOHN VON NEUMANN et moi-même avons commencé à discuter la possibilité d'utiliser les ordinateurs de façon heuristique, pour essayer d'obtenir quelques lumières sur des questions de mathématiques pures. En produisant des exemples et en observant les propriétés de certains objets mathématiques, on peut espérer obtenir des éléments de réponse quant au comportement des lois générales. Lors des années qui ont suivi j'ai suggéré, et dans certains cas résolu, une variété de problèmes de mathématiques pures en expérimentant ou même tout simplement en observant». ².

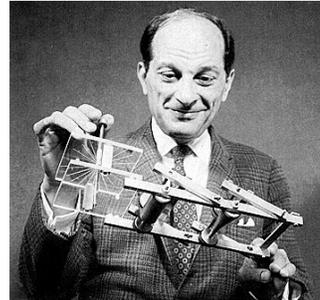
(Extrait de l'autobiographie de S. ULAM, *Adventures of a Mathematician*, 2d ed., Berkeley, 1991)

1. <http://experiences.math.cnrs.fr/L-experimentation-numerique-dans-50.html>

2. Il sous-entend bien sûr « à l'ordinateur »

ULAM propose d'utiliser les ordinateurs non pas comme un simple « moulin » à calculs mais comme un outil d'expérimentation permettant d'explorer les solutions des équations que l'on étudie. La vision d'ULAM a été influencée par la physique, plus précisément l'étude numérique de modèles simplifiés de diffusion des neutrons, en lien avec la bombe atomique. Notons que les premiers calculs pour une réaction en chaîne sont réalisés par NICHOLAS METROPOLIS en 1947, sur l'ENIAC.

Dans un texte écrit en 1947 intitulé « *The Mathematician* », VON NEUMANN fait le bilan de ses travaux et se demande si les mathématiques sont une science empirique. Il tente de répondre à cette question par une confrontation avec les démarches de la physique théorique. Pour lui, il y a une base empirique aux mathématiques qui a été occultée par leur développement. Mais « quand des tendances à devenir baroque se font jour, le signal de danger doit être émis » et le seul remède est, selon lui, la ré-injection d'idées plus ou moins directement empiriques.



S. ULAM

Dans cet esprit, ULAM cherche à développer une pratique des expériences numériques, d'abord dans le domaine de la combinatoire et de la théorie des nombres. Avec ses collaborateurs, il s'intéresse ensuite à l'exploration du comportement d'itérations de transformations non linéaires qui sont le pendant en temps discret des équations différentielles. Ils utilisent un système connecté à l'ordinateur permettant la visualisation des itérations. C'est une nouvelle façon d'étudier les itérations non linéaires qui nous paraît aujourd'hui évidente. Ces analyses posent de nouveaux problèmes et ouvrent de nouvelles perspectives.

3 Enrico Fermi, John Pasta, Stanislas Ulam & Mary Tsingou

À Los Alamos, au début des années 1950, ENRICO FERMI, JOHN PASTA et STANISLAS ULAM proposent un modèle pour comprendre l'évolution vers l'équilibre thermique dans un cristal. Leur modèle est suffisamment simple pour être étudié avec un ordinateur de l'époque.

Il s'agit d'une chaîne unidimensionnelle de masses identiques reliées entre elles par des ressorts. Quand on écarte une masse de sa position d'équilibre, elle subit une force de rappel qui n'est pas proportionnelle à la distance par rapport à la position d'équilibre. Ce modèle est différent de celui étudié dans les cours de physique où il y a proportionnalité (on dit que la chaîne d'oscillateurs est « harmonique », ce qui rend le modèle « linéaire » et donc résoluble). Même la faible « anharmonicité » introduite par FERMI, PASTA et ULAM rend le modèle très compliqué et nécessite son exploration par une expérience numérique, sans

doute la première du genre. Ils considèrent 16, 32 puis 64 masses et, à leur grande surprise, ils découvrent que le système, loin de tendre vers l'équipartition de l'énergie (synonyme de thermalisation), présente au contraire des solutions quasi-périodiques, en contradiction avec l'hypothèse ergodique qu'on pensait alors vérifiée dans ce cas.

En 1955, ils écrivent un rapport interne [10] dans lequel ils mentionnent que l'écriture de l'algorithme et la programmation du MANIAC I furent la tâche de MARY TSINGOU [7].

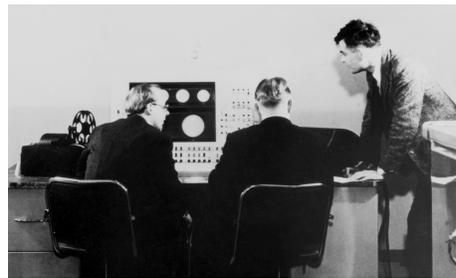
Ces expériences ouvrirent la voie à toute une classe de problèmes nouveaux concernant les systèmes dynamiques non ergodiques et constituèrent le point de départ de ce qui est maintenant une discipline à part entière : la physique numérique, qu'on peut considérer comme une branche intermédiaire entre la physique théorique et la physique expérimentale.

4 La morphogenèse selon Alan Turing

Un des problèmes que s'était posé le biologiste D'ARCY THOMPSON est l'apparition de formes similaires pour des organismes non-apparentés, donc non explicables par des facteurs purement génétiques. TURING postula qu'il devait y avoir un processus général à l'œuvre obéissant à des lois physico-chimiques. Il s'attela donc à la mise en place d'un modèle mathématique dont le but était de rendre compte de la « morphogenèse », c'est-à-dire, le passage d'un état d'équilibre initial symétrique, à un nouvel état d'équilibre non-symétrique qui constitue une forme. Ce passage devrait résulter d'une « réaction-diffusion » dans la chimie des composants du système.

En 1952 TURING publie un article célèbre intitulé « The chemical basis of morphogenesis » [21] dans lequel il propose un tel modèle et discute notamment deux exemples :

- la constitution de taches qui font penser à celle qu'on voit sur certains pelages d'animaux ;
- l'hydre d'eau douce qui développe de cinq à dix tentacules à partir d'une forme initiale tubulaire symétrique.



TURING (debout) et le MARK I

Dans son article, TURING fait la plupart de ses calculs à la main mais montre un exemple numérique réalisé avec l'ordinateur de Manchester (le MARK I).

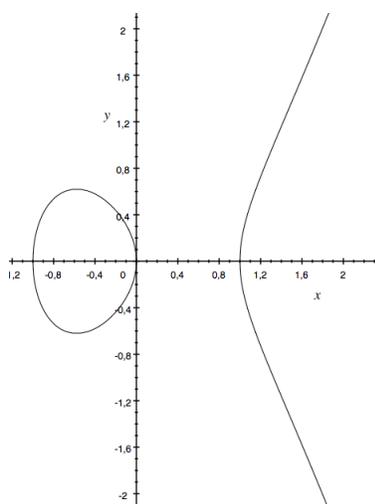
Du point de vue qui nous intéresse ici, TURING suggère que l'expérimentation numérique doit devenir un véritable instrument dans l'investigation de la nature. Il le confirme lui-même dans ses travaux ultérieurs consacrés à la botanique, plus précisément en phyllotaxie.³ Il faudra attendre 1990 pour obtenir des structures de TURING dans une véritable expérience de chimie [5].

3. c-à-d la disposition des feuilles le long des tiges des plantes

5 Bryan Birch & Peter Swinnerton-Dyer & les points rationnels des courbes elliptiques

Cet exemple illustre l'apport de l'expérimentation numérique dans un domaine des mathématiques « pures » : la géométrie algébrique. Les mathématiciens ont toujours été fascinés par les équations algébriques dont on cherche des solutions qui sont des nombres entiers ou des nombres rationnels. C'est par exemple à EUCLIDE qu'on attribue la première description de toutes les solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ où (x, y, z) est un triplet d'entiers (non nuls). Géométriquement cela revient à chercher tous les triangles rectangles ayant des côtés de longueur entière, c'est pourquoi on parle de triplets pythagoriciens. On sait bien qu'il y a un nombre infini de telles solutions (telles que x, y, z n'ont pas de facteur commun). En divisant cette équation par z^2 , cela revient à chercher les points de coordonnées rationnelles sur un cercle.

L'équation $x^2 + y^2 = z^2$ est un exemple d'équation diophantienne, c'est-à-dire d'une équation polynomiale à coefficients entiers dont on cherche les solutions entières ou rationnelles. Décrire les solutions des équations diophantiennes est en général hors d'atteinte. Un problème plus simple est de se demander s'il y a un nombre fini ou infini de solutions pour une équation donnée. On vient de voir un exemple avec un nombre infini de solutions. Un exemple où il n'y en a qu'un nombre fini (zéro en l'occurrence) est l'équation $x^2 + y^2 = -1$. On sait résoudre ce problème mais une classe d'équations résiste : celles des *courbes elliptiques*.



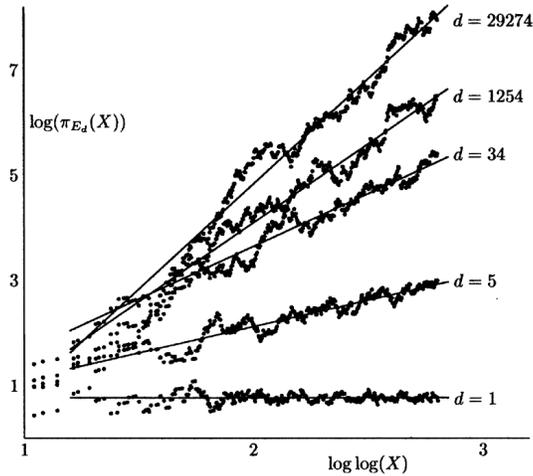
Courbe elliptique correspondant à l'équation $y^2 = x^3 - x$.

toujours pas répondre à cette question en général, mais une conjecture a été proposée en 1965 par BRYAN BIRCH et PETER SWINNERTON-DYER sur la base d'expériences numériques menées sur l'EDSAC (descendant de l'ENIAC, cité plus haut) au laboratoire d'informatique de l'université de Cambridge [2].

Une courbe elliptique est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$ où a et b sont des rationnels tels que $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.⁽⁴⁾ L'exemple avec $a = -1$ et $b = 0$ donne la courbe de la figure suivante.

On s'intéresse aux points de la courbe qui ont des coordonnées rationnelles. On parle de solutions rationnelles. Il est facile de vérifier que $(1, 0)$ est une solution rationnelle, contrairement à $(2, \sqrt{6})$. FERMAT a montré que les seules solutions rationnelles sont $(-1, 0)$, $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Pour une courbe elliptique quelconque, a-t-on un nombre fini ou infini de solutions rationnelles? Il s'avère qu'on ne sait

4. ceci exclut les points doubles et les points de rebroussement.



D'après [2]. On a $r = 0$ pour $d = 1$, $r = 1$ pour $d = 5$, $r = 2$ pour $d = 34$, $r = 3$ pour $d = 1254$ et $r = 4$ pour 29274 .

Au début des années 1960, BIRCH et SWINNERTON-DYER se sont mis à calculer le nombre N_p de points modulo p sur une courbe elliptique E de rang r connu, pour un grand nombre de nombres premiers p et pour de nombreuses courbes elliptiques. De leurs expériences numériques ils ont déduit que, vraisemblablement, on a

$$\pi_E(X) := \prod_{p \leq X} \frac{N_p}{p} \sim C(\log X)^r, \quad X \rightarrow \infty,$$

où C est une constante ne dépendant que de la courbe. Le *rang* d'une courbe elliptique est le nombre minimal de points rationnels permettant de retrouver tous les points rationnels de la courbe. Le rang est nul si et seulement si la courbe a un nombre fini de solutions rationnelles.⁵ Pour les courbes E_d de la forme $y^2 = x^3 - dx$, BIRCH et SWINNERTON-DYER firent les calculs pour cinq valeurs de d . Leurs résultats se trouvent dans la figure ci-dessus.

L'étape suivante a été de reformuler ces observations sous une forme plus précise faisant intervenir une fonction $L_E(s)$ que nous ne décrivons pas. La conjecture de BIRCH et SWINNERTON-DYER énonce que l'ordre d'annulation de $L_E(s)$ en $s = 1$ est exactement r . En particulier, le nombre de solutions rationnelles d'une courbe elliptique E est donc conjecturé comme infini si et seulement si $L_E(1) = 0$, ce qui fournirait un algorithme pour décider si oui ou non une courbe elliptique possède un nombre infini de solutions rationnelles.

5. cf. le théorème de Mordell-Weil.

6 Edward Lorenz : de la météo aux attracteurs étranges

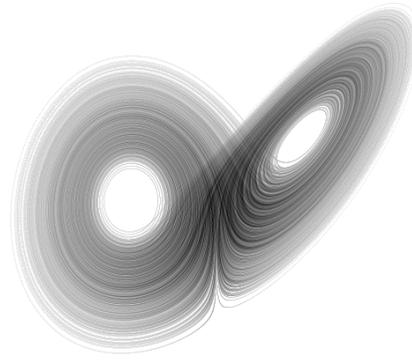
Au début des années 1960, EDWARD LORENZ étudie les phénomènes de convection dans l'atmosphère terrestre. Il travaille comme météorologue au Massachusetts Institute of Technology. Il obtient un modèle de seulement trois équations différentielles couplées après avoir drastiquement simplifié les équations fournies par la physique. Nous ne tenterons pas de décrire ici ce que représentent ces équations. Le point qui nous intéresse ici est que LORENZ résout numériquement les équations et découvre ce qu'on a appelé par la suite le « chaos déterministe ».

Le phénomène de base est la « sensibilité » aux conditions initiales, autrement dit, le fait que d'infimes différences dans les conditions initiales produisent des trajectoires complètement différentes au bout d'un temps assez bref. L'observation capitale et remarquablement fine de LORENZ, compte-tenu de l'ordinateur qu'il avait à sa disposition (un Royal McBee LGP-300), est que les trajectoires ont beau dépendre des conditions initiales, elles semblent néanmoins s'accumuler sur une sorte de surface compliquée qui est insensible aux conditions initiales. LORENZ fait une esquisse de cet objet qui semble de dimension deux et dont s'approche rapidement la trajectoire d'une condition initiale. Elle voyage ensuite sur cette « surface » composée de deux sortes de lobes, passant de l'un à l'autre d'une manière qui semble aléatoire. LORENZ fait d'autres observations remarquablement inspirées que nous ne décrivons pas ici.

LORENZ venait d'observer le premier « attracteur étrange » comme allait le qualifier le physicien-mathématicien DAVID RUELLE. Il s'agit d'un objet extraordinairement compliqué résultant pourtant de seulement trois équations différentielles couplées en apparence innocentes.

Il convient de saluer l'extraordinaire intuition de LORENZ car on pouvait interpréter ces observations comme un artefact de l'ordinateur. Cette question se poserait également aujourd'hui : rien ne dit que ce qu'on observe numériquement reflète correctement les équations sous-jacentes. Mais c'était pire à l'époque : les ordinateurs étaient volumineux, bruyants, lents, chauffaient énormément et, qui plus est, étaient beaucoup moins fiables qu'aujourd'hui.

LORENZ publia ses résultats en 1963 dans un journal de météorologie [15]. Pour la petite histoire, notons que son article fut confié par le journal à ULAM pour évaluation. Il fallut près de dix ans avant que les physiciens et les mathématiciens ne réalisassent l'importance de cet article. C'est en effet en 1972 que LORENZ présente l'« effet papillon » devant l'Association Américaine pour le



L'attracteur de LORENZ

progrès des Sciences avec une célèbre question [16] : «*Le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ?*»⁶ Mais, surtout, LORENZ exhibe sur son écran d'ordinateur l'image surprenante de son attracteur.

Il a fallu attendre 1998 pour que WARWICK TUCKER démontre mathématiquement dans sa thèse de doctorat l'existence de cet attracteur. Sa démonstration repose sur un intégrateur numérique donnant un contrôle rigoureux des erreurs d'approximation des trajectoires [20]. Terminons en citant un extrait d'un article de LORENZ où il fait référence à ULAM juste après ces lignes :

« Nous voyons ainsi que l'ordinateur devrait jouer un rôle important, au-delà d'être un simple moulin à calculs. La machine ne peut pas prouver un théorème, mais elle peut suggérer une proposition à prouver. La proposition peut ensuite être prouvée et établie comme un théorème par des moyens analytiques, mais l'existence même du théorème pourrait ne pas être suspectée sans l'aide d'une machine. »
(E. N. LORENZ. The problem of deducing the climate from the governing equations. *Tellus*, 16 (1964).)

7 Martin Kruskal & Norman Zabusky (re)découvrent numériquement les solitons

Au début des années 1960, les américains MARTIN KRUSKAL (physicien) et NORMAN ZABUSKY (mathématicien et physicien) reprennent le modèle de FERMI-PASTA-ULAM en changeant le terme non linéaire qui régit l'interaction entre les ressorts.

Avec leur programmeur, GARY DEEM, ils procèdent à des expérimentations numériques qui les conduisent à l'observation d'un nouveau phénomène : des ondes « solitaires », qu'ils baptisent « solitons » [25]. Ces expériences numériques sont menées au Bell Telephone Laboratory, à Whippany, sur des machines IBM 709 et 7090.

La théorie des solitons permet de comprendre plusieurs phénomènes physiques où une déformation initiale localisée dans l'espace se propage à vitesse constante en ne se déformant quasiment pas sur de longues distances. En hydrodynamique, mentionnons les mascarets qui apparaissent à l'embouchure de certains fleuves sous l'effet de fortes marées, ou les raz-de-marée (tsunamis). En optique non linéaire, on utilise des solitons pour améliorer la propagation dans les fibres optiques. Les solitons sont des objets intrinsèquement non linéaires contrairement aux ondes classiques. En particulier, deux solitons peuvent se croiser sans interagir alors que des ondes classiques interfèrent entre elles.

KRUSKAL et ZABUSKY réalisent qu'une approximation continue de leur modèle à la FERMI-PASTA-ULAM n'est autre qu'une équation aux dérivées partielles

6. L'effet papillon devint célèbre auprès d'un large public. Il est encore souvent mal interprété. Il est amusant de rappeler que LORENZ ajoute que le battement d'aile d'un papillon peut très bien « empêcher » la tornade...

qui avait été introduite par DIEDERIK KORTEWEG et son étudiant GUSTAV DE VRIES en 1895. Leur but était d'expliquer les vagues bizarres observées cinquante ans plus tôt par l'ingénieur écossais JOHN SCOTT RUSSELL dans un canal. C'est donc indirectement le travail de FERMI-PASTA-ULAM, repris par KRUSKAL et ZABUSKY, qui a fait sortir de l'oubli l'équation de KORTEWEG-DE VRIES après quelque soixante-dix ans de sommeil ! Tout un pan de la physique et des mathématiques venait de naître.

Dans l'approche de KRUSKAL et ZABUSKY, la visualisation joue un rôle crucial. Ceci nous paraît banal aujourd'hui mais ce n'était pas le cas à cette époque : ils ont non seulement dû inventer leurs propres outils de visualisation, mais aussi d'interaction avec le programme. Pour eux, il est clair que l'expérimentation numérique interactive dépasse le simple outil : modifier « en temps réel » des paramètres et visualiser presque aussitôt le résultat, puis éventuellement recommencer, développe une intuition et un rapport nouveaux avec les équations [24].



Reconstitution de l'onde solitaire de RUSSELL en 1995, près d'Édimbourg (cf. <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>).

8 Michel Hénon : de l'astrophysique aux attracteurs étranges

MICHEL HÉNON a placé au cœur de sa pratique scientifique les expériences numériques qu'il considérait comme ayant un statut comparable aux expériences de physique habituelles. Il s'intéresse à l'astrophysique qui est un domaine où l'expérimentation directe est impossible ! Le calcul numérique ouvre donc a priori la possibilité d'étudier des modèles, seule façon de faire des « expériences ».

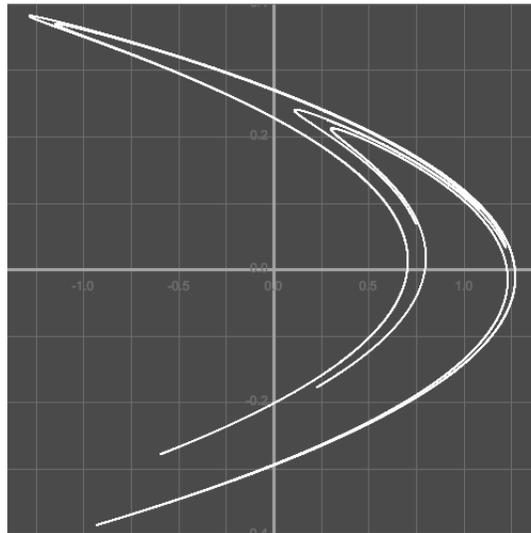
Dans un premier temps, HÉNON participe à la construction de calculateurs analogiques et en construit entièrement un pour son propre usage, ce qui lui donne un rapport presque physique au calcul. Avec l'avènement et la démocratisation des ordinateurs modernes (calculateurs digitaux), il utilisera l'IBM 750 de Meudon, l'IBM 7040 de l'observatoire de Nice ou encore la toute première calculatrice programmable de poche, la HP 65.

Dans les années 1960, HÉNON s'intéresse à différents problèmes d'astrophysique. Durant son séjour à Princeton, en 1962, il projette d'étudier le problème d'une étoile dans une galaxie asymétrique. Il réalise plusieurs expériences numériques qui révèlent des « irrégularités ». Il confie à un étudiant, CARL HEILES, la tâche de refaire ses calculs, sur une autre machine, indépendamment, comme on ferait avec une expérience de physique dont on exige qu'elle soit reproductible. Ces résultats conduiront à l'article de HÉNON et HEILES de 1964 qui révèle un

mélange de comportements quasi-périodiques et « ergodiques », cf. [12].

L'astronomie étant une discipline très mathématisée, HÉNON propose de se concentrer sur les propriétés mathématiques de modèles simples obtenus par des méthodes bien connues (datant de POINCARÉ et BIRKHOFF) qui conduisent à remplacer les équations différentielles par des itérations en utilisant des « sections transverses » habilement choisies. Même simples, ces modèles restent extrêmement difficiles à étudier analytiquement et HÉNON propose donc de faire un usage systématique des expériences numériques. Un travail de longue haleine concerne la classification des trajectoires dans le problème restreint des trois corps. Il illustre magnifiquement comment mettre en pratique les idées de POINCARÉ et BIRKHOFF pour explorer le comportement des trajectoires.

Le travail pour lequel HÉNON est sans doute le plus connu en dehors de l'astronomie est celui qui a conduit à l'attracteur étrange qui porte son nom [11]. En jouant sur les paramètres des équations de LORENZ et en utilisant une section de POINCARÉ, YVES POMEAU, qui réalise une série de calculs numériques avec J. L. IBANEZ, met en évidence le mécanisme de formation d'un « fer à cheval » de S. SMALE. POMEAU expose ses travaux lors d'un séminaire donné à l'Observatoire de la Côte d'Azur auquel assiste MICHEL HÉNON.



L'attracteur de HÉNON

Ce dernier propose alors un modèle très simple de transformation quadratique du plan qui simule, lorsqu'un paramètre varie, le mécanisme de formation d'un « fer à cheval » : c'est le fameux modèle de HÉNON. L'exploration numérique de ce modèle montre, pour certaines valeurs des paramètres, l'existence d'un « attracteur étrange ». Le fait que cet attracteur existe vraiment, c-à-d qu'il n'est pas un artefact numérique, est resté un problème ouvert jusqu'en 1991. Ce sont les mathématiciens suédois BENEDICKS et CARLESON qui, les premiers,

ont démontré mathématiquement l'existence de tels objets [1].

9 La cascade de doublements de période : Mitchell Feigenbaum, Pierre Coulet & Charles Tresser

En 1978, PIERRE COULLET, jeune chercheur au CNRS à l'Université de Nice et CHARLES TRESSER, étudiant en 3e cycle, s'intéressent au mécanisme de transition vers la turbulence et en particulier à sa modélisation par des systèmes dynamiques simples, comme l'itération d'une application de l'intervalle. Comme pour le modèle de HÉNON, l'exploration numérique a joué un grand rôle dans leurs travaux. La nouveauté réside dans une approche « interactive » de l'expérimentation numérique : la visualisation du résultat obtenu en « temps réel » pour une valeur du paramètre permet de faire de nouveaux choix des valeurs des paramètres et de se forger ainsi une intuition du phénomène.

En même temps que MITCHELL FEIGENBAUM [9], et indépendamment de lui, ils se sont inspirés d'idées du « groupe de renormalisation » en physique statistique pour analyser la transition vers le « chaos » pour les applications « unimodales » de l'intervalle (c-à-d avec une seule « bosse »). Plus précisément ils montrent que la transition vers le chaos pour les applications unimodales se fait par une cascade de doublements de période qui possède des propriétés géométriques universelles [6]. Cette universalité se manifeste par le fait que les valeurs du paramètre pour lesquelles on assiste à un doublement de période des orbites périodiques s'accroissent avec une raison géométrique indépendante des détails du modèle d'applications que l'on étudie.

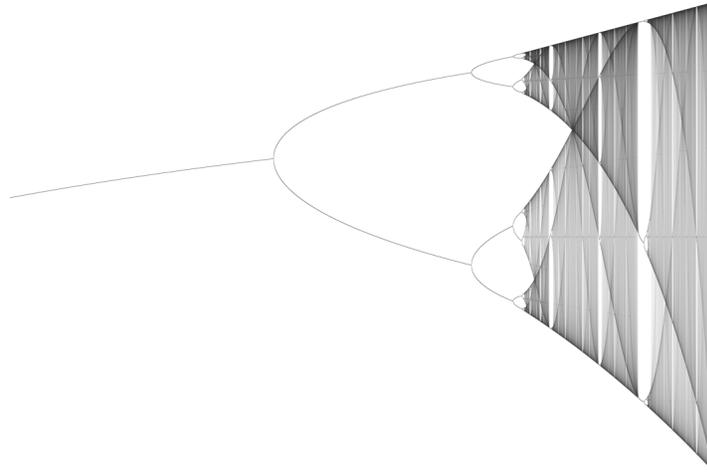


Diagramme de bifurcation de doublements de période de l'application $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec $f_r(x) = rx(1 - x)$ et $r \in [2, 4]$.

Au moyen d'un ordinateur HP 9825 et d'un « traceur XY », COULLET et TRESSER ont pu visualiser les itérations de l'application logistique, changer de paramètre et visualiser immédiatement le résultat de ce changement. Le langage HPL, proche du Basic, permettait de modifier la valeur d'une variable au clavier, sans interrompre le programme. Notons que FEIGENBAUM a de son côté utilisé une HP 65.

On peut se demander s'il est possible d'observer une transition vers le chaos par une cascade de doublements de période dans une vraie expérience de physique. La réponse est positive : en 1979, ALBERT LIBSCHABER mena une expérience de convection avec de l'hélium liquide. En augmentant peu à peu le paramètre de contrôle que constitue la différence de température entre le bas et la haut de la cellule de convection, il observa effectivement une transition vers le chaos suivant ce schéma.

10 Itérations de polynômes complexes : Benoît Mandelbrot & John Hubbard

Nous évoquons pour terminer la dynamique complexe, un domaine défriché par les mathématiciens français PIERRE FATOU et GASTON JULIA au début du 20e siècle, mais qui doit son réveil, après environ une soixantaine d'années d'hibernation, à l'expérimentation numérique. En effet, la visualisation des ensembles de JULIA a été une révélation qui a permis aux mathématiciens de se poser les bonnes questions.

Dans la préface du livre *The Mandelbrot set, theme and variations* [13], le mathématicien JOHN HUBBARD explique comment l'enseignement en DEUG, en 1976-77, à l'université d'Orsay, l'a amené à faire des expériences numériques. En cherchant comment utiliser un ordinateur dans le cadre de son cours d'analyse, il choisit d'illustrer la méthode de NEWTON. Comme son domaine de recherche est l'analyse complexe, il l'applique à un polynôme complexe, par exemple $z^3 - 1$, pour visualiser les bassins d'attraction des racines. Il se fait aider par MICHEL FIOLETT pour écrire des programmes sur une mini 6. Stimulé par le mathématicien DENNIS SULLIVAN qui se trouve à l'IHÉS, il explore et visualise divers « ensembles de JULIA » : étant donné deux nombres complexes z_0 et c , on définit la suite (z_n) par récurrence en posant $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Pour une valeur donnée de c , l'ensemble de JULIA correspondant est la frontière de l'ensemble des valeurs initiales z_0 pour lesquelles la suite est bornée.

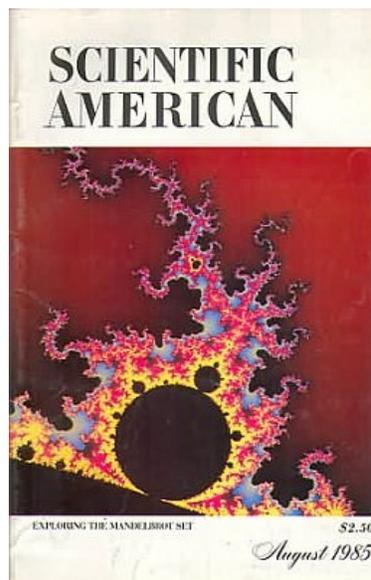
Il semble que HUBBARD ait montré ses images durant une conférence à laquelle assistait BENOÎT MANDELBROT, en 1977, aux USA. Ce dernier lui dit avoir souvent pensé à ces ensembles sans jamais avoir cherché à en obtenir des images. HUBBARD mentionne que l'arrivée de l'Apple II, en 1981-82, va énormément compter pour lui et va lui permettre d'obtenir facilement de bien meilleures images qu'auparavant.

Alors que MANDELBROT travaille chez IBM et a accès aux meilleurs ordinateurs de l'époque, c'est lors d'un séjour à Harvard qu'il obtient pour la première

fois, en mars 1980, au moyen d'un ordinateur VAX, une visualisation grossière de l'ensemble qui portera son nom. Un enseignant auxiliaire nommé PETER MOLDAVE lui offre ses services de programmeur [18].

Cet ensemble est obtenu en traçant l'ensemble de toutes les valeurs de c pour lesquelles la suite définie ci-dessus est bornée, en démarrant à chaque fois de $z_0 = 0$. MANDELBROT publie un article sur ses résultats la même année [17].

L'étude approfondie de l'ensemble de MANDELBROT commence réellement en 1984 avec les travaux de DOUADY et HUBBARD, qui établissent ses propriétés fondamentales et baptisent l'ensemble en l'honneur de MANDELBROT. HUBBARD utilise beaucoup d'expériences numériques pour guider leur intuition. En 1985, les mathématiciens HEINZ-OTTO PEITGEN et PETER RICHTER popularisent l'ensemble de MANDELBROT par des images de qualité et qui frappent les esprits.



11 En guise de conclusion

Cet article s'est focalisé sur l'usage des ordinateurs comme instruments d'exploration et de découverte. Les exemples que nous avons choisis illustrent le rôle indispensable qu'ils ont joué.

Nous n'avons pas abordé pas l'analyse numérique, c'est-à-dire, comment résoudre des problèmes mathématiques continus avec des algorithmes discrets.

Nous n'avons pas non plus abordé les démonstrations assistées par ordinateur («computer-assisted proofs»). Le théorème des quatre couleurs est un exemple célèbre de telle démonstration (cela remonte à 1976). En 2013, HARALD HELFGOTT a annoncé une démonstration de la conjecture faible de GOLDBACH⁷ dont une partie est assistée par ordinateur.

Un autre aspect que nous avons laissé de côté est celui des assistants de preuve permettant des démonstrations formelles. Citons le logiciel *Coq* utilisé par exemple pour démontrer en 2012 le théorème de FEIT et THOMPSON⁸ de manière complètement « mécanisée ». On peut comprendre l'intérêt d'une telle

7. à savoir que tout entier impair plus grand que 5 s'écrit comme la somme de trois nombres premiers.

8. qui énonce que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble.

démarche quand on apprend que la démonstration « classique » couvre plus de deux cents pages !

Références

Note : La plupart des textes ci-dessous sont librement disponibles sur l'Internet. Vous les trouverez aisément en utilisant votre moteur de recherche favori.

- [1] M. BENEDICKS & L. CARLESON. The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math.* **133** (1991), no. 1, 73–169.
- [2] B. J. BIRCH & H. P. F. SWINNERTON-DYER. Notes on elliptic curves. *I. J. Reine Angew. Math.* **212** (1963).
- [3] J. BORWEIN & D. BAILEY. *Mathematics by Experiment : Plausible Reasoning in the 21st Century*, 2nd ed., Taylor & Francis (2004).
- [4] J. BORWEIN, D. BAILEY & R. GIRGENSOHN. *Experimentation in Mathematics : Computational Paths to Discovery*, Peters (2004).
- [5] V. CASTETS, E. DULOS, J. BOISSONADE & P. DE KEPPER. Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern. *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990).
- [6] P. COULLET & C. TRESSER. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. *Le Journal de Physique* **35** (1978).
- [7] T. DAUXOIS. FERMI, PASTA, ULAM and a mysterious lady. *Physics Today*, January 2008.
- [8] M. FARGE. L'approche numérique en physique. *Fundamenta Scientiae* **7** (1986).
- [9] M. FEIGENBAUM. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. *J. Stat. Phys.* **19** (1978).
- [10] E. FERMI, J. PASTA ET S. ULAM. Studies of Nonlinear Problems. Document Los Alamos 1940 (May 1955).
- [11] M. HÉNON. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* **50** (1976).
- [12] M. HÉNON & C. HEILES. The applicability of the third integral of motion : Some numerical experiments. *The Astrophysical Journal* **69** (1964), 73-79.
- [13] J. HUBBARD. Préface de : *The MANDELBROT set, theme and variations*. Edited by Lei Tan. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**. Cambridge University Press, 2000.
- [14] J. HUBBARD, B. WEST Differential equations : a dynamical systems approach. [Vol. I : Ordinary differential equations. Texts in Applied Mathematics **5**. Vol. II : Higher-dimensional systems. Texts in Applied Mathematics **18**.] Springer, 1995.
- [15] E. N. LORENZ. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* **20** (1963).

- [16] E. N. LORENZ. Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas? 139th Annual Meeting of the American Association for the Advancement of Science (29 Dec 1972), in *Essence of Chaos* (1995), Appendix 1, p. 181.
- [17] B. MANDELBROT. Fractal aspects of the iteration of $z \mapsto \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z . *Ann. New York Acad. Sci.* **357** (1980).
- [18] B. MANDELBROT. *Fractals and the Rebirth of Iteration Theory*. In : Peitgen & Richter : The Beauty of Fractals (1986), pp 151-160.
- [19] L. PETITGIRARD. *Le chaos : des questions théoriques aux enjeux sociaux*. Thèse de doctorat, Univ. Lyon 2, 2004. Cf. chapitre 9.
- [20] W. TUCKER. The LORENZ attractor exists (1998).
<http://www2.math.uu.se/~warwick/main/thesis.html>
- [21] A. TURING. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society* **237** (1952).
- [22] S. ULAM. *Science, computers, and people*. Birkhuser, 1986.
Cf. en particulier le chapitre 6 (*Computers in Mathematics*) & le chapitre 17 (*Von Neumann : The Interaction of Mathematics and Computing*).
- [23] T. WEISSERT. *The genesis of simulation in dynamics. Pursuing the Fermi-Pasta-Ulam problem*. Springer-Verlag, 1997.
Cf. Chapitre 5 : « Steps to an Epistemology of Simulation ».
- [24] N. ZABUSKY. FERMI-PASTA-ULAM, Solitons and the Fabric of Nonlinear and Computational Science : History, Synergetics and Visiometrics. *Chaos* **15** (2005).
- [25] N. J. ZABUSKY & M. D. KRUSKAL. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965).